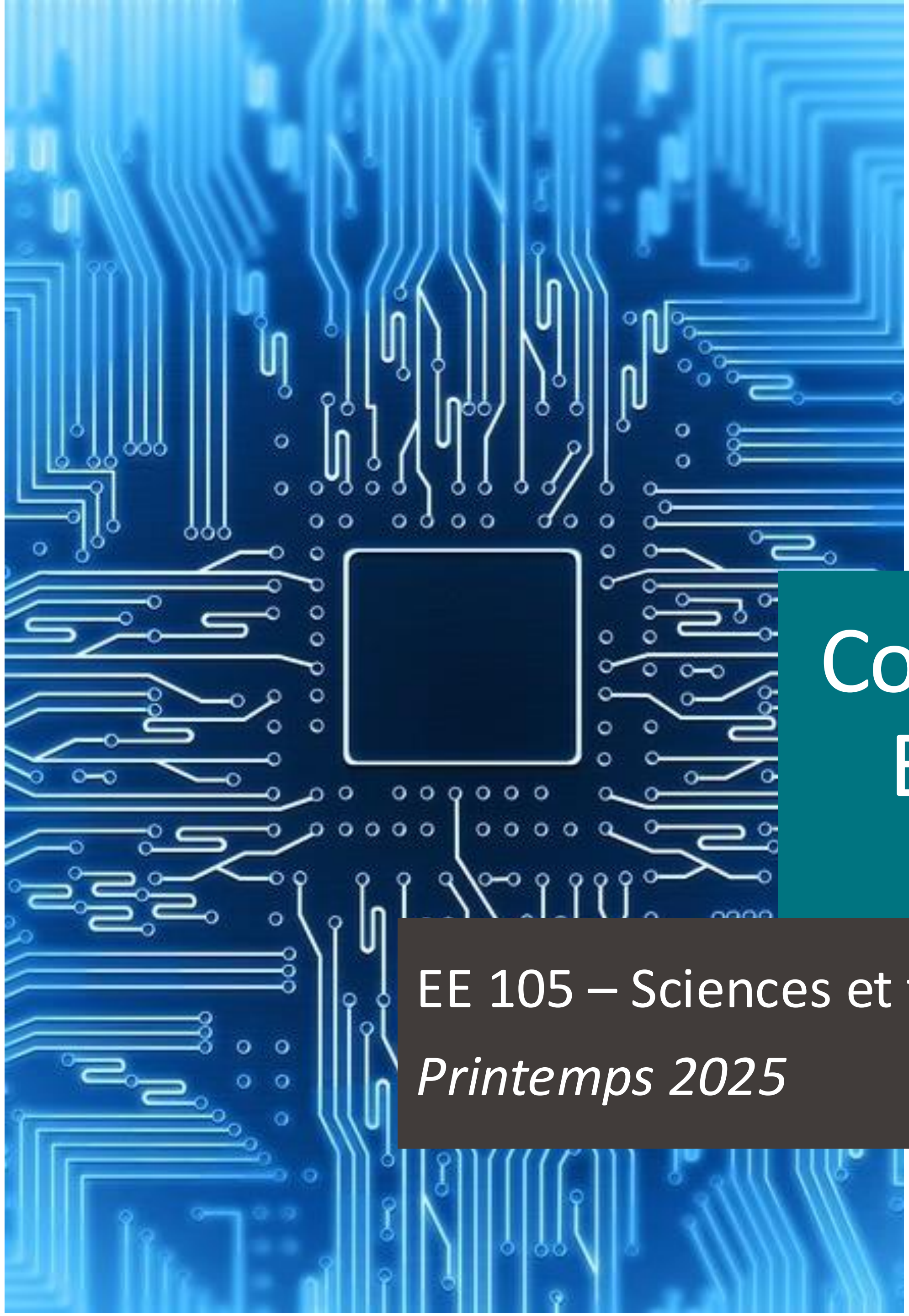


Cours 6
Eléments nonlinéaires

EE 105 – Sciences et technologies de l’électricité

Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rappel

Principe de Thévenin

- Un circuit composé de multiples sources/multiples résistances peut être remplacé par une seule résistance en série (R_i) avec une source de tension indépendante (U_0)

Principe de Norton

- Un circuit composé de multiples sources/multiples résistances peut être remplacé par une seule résistance en parallèle (R_i) avec une source de courant indépendante (i_{cc})

Un circuit est adapté en puissance lorsque la résistance de la charge est égale à la résistance interne du circuit qui l'alimente

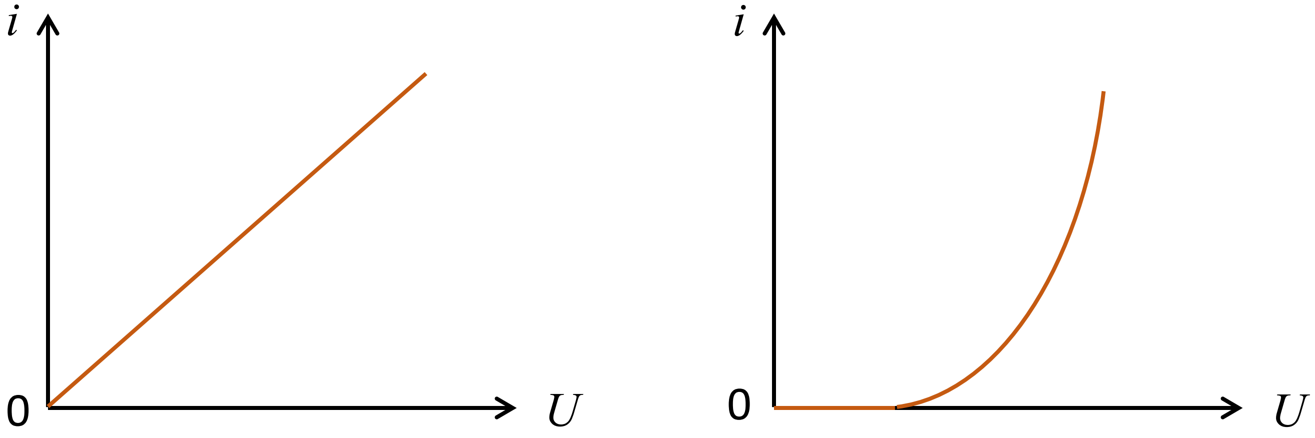
$$R_i = R_L \qquad\qquad P_{L,max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Eléments linéaires/non-linéaires

Jusqu'à présent nous avons toujours considéré que les éléments d'un circuit étaient linéaires, telle que la relation $i = f(u)$ est linéaire.

Il existe cependant beaucoup de composants en électrotechnique telle que la relation $i = f(u)$ n'est pas linéaire.

- C'est le cas notamment des diodes .
- Des éléments électro-optiques, tels que les lasers à semi-conducteurs, ont eux aussi une réponse non-linéaire .



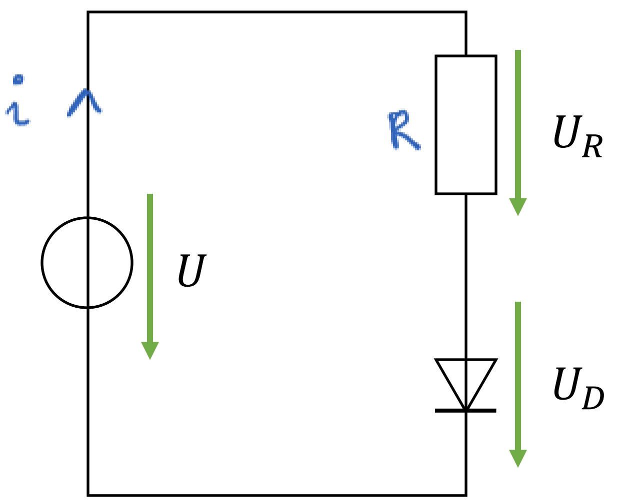
Nous pouvons avoir recours à des méthodes numériques ou graphiques

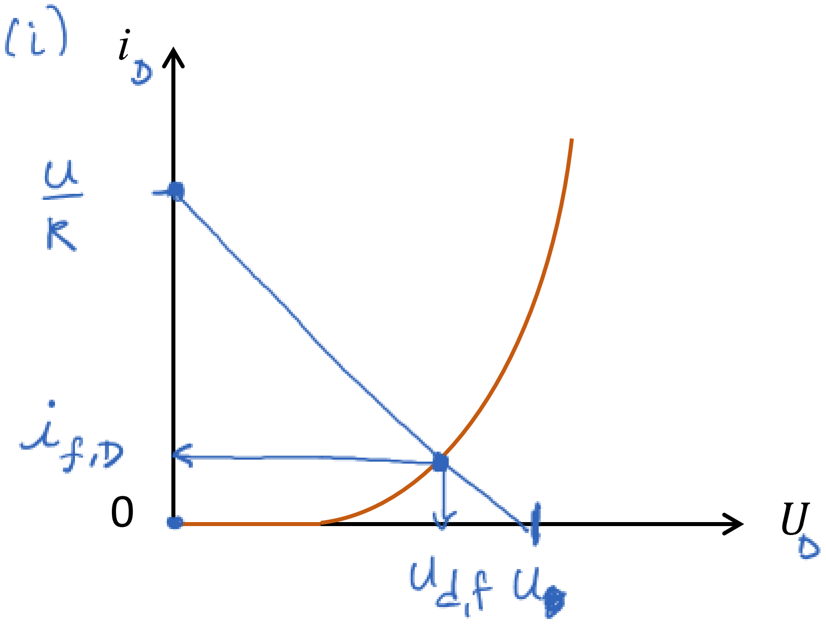
- Ici nous allons simplement illustrer la méthode graphique avec des exemples concrets

Analyses de circuit avec éléments non-linéaires

Considérons le circuit contenant une diode D dont la caractéristique courant-tension est reportée par le graphe.

$i = f(u_D)$





$u_R = R\, i \Rightarrow i = \dfrac{u_R}{R}$

$u_R + u_D = u$

$u_R = u - u_D$

$\therefore\ i = \dfrac{1}{R}(u - u_D)$

Eléments de réglage – résistance additionnelle

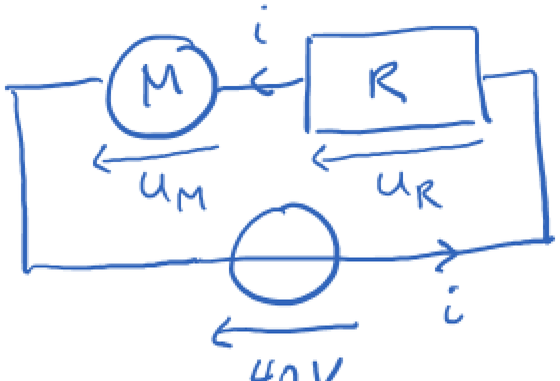
Lorsqu’un appareil est prévu pour fonctionner sous une tension inférieure à la tension délivrée par la source disponible, il est néanmoins possible de l’utiliser.

On le place en série avec une résistance additionnelle qui provoquera la chute de tension nécessaire

Exemple: soit un moteur M, de puissance nominale 240 W, destiné à fonctionner sous une tension U_m = 30 V. Nous disposons d’une source de tension de 40 V.

$U_m = 30V$

$P_m = 240W$



$P_m = u_m i \Rightarrow i = \frac{240}{30} = 8A$

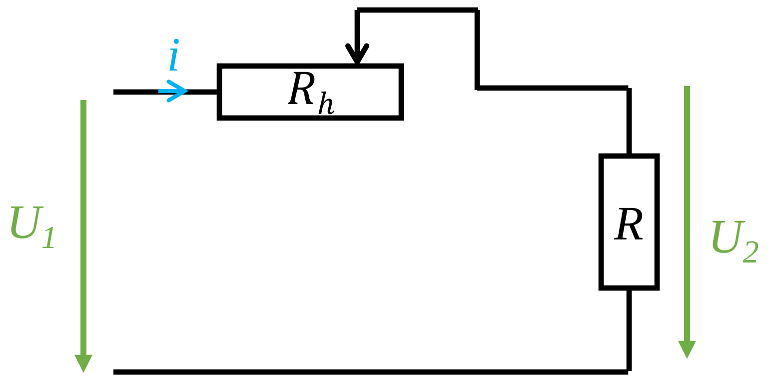
$u_R + u_M = 40$

$u_R = 10 = Ri \Rightarrow R = \frac{10}{8} = 1.25\Omega$

Eléments de réglage - rhéostat

Un *rhéostat* est une résistance électrique réglable qui, intercalée en série dans un circuit, permet d'en modifier l'intensité du courant

- Il est généralement constitué d'une résistance variable dimensionnée de manière à supporter l'intensité maximale du courant devant la traverser.



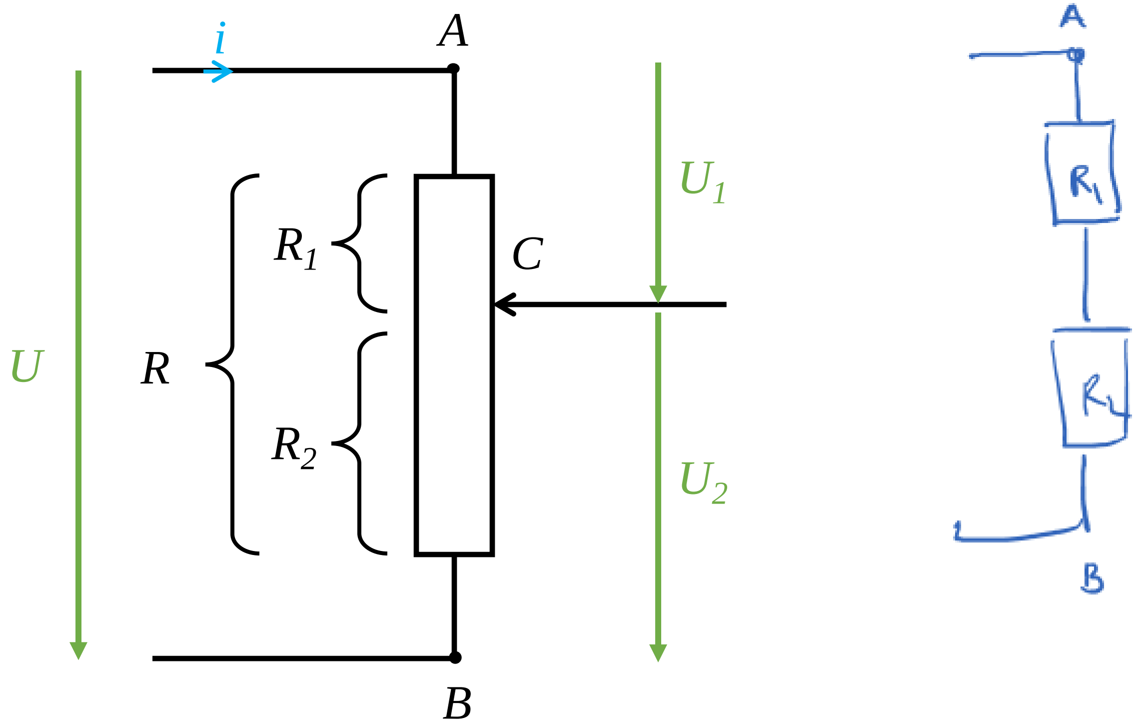
$$U_2 = \frac{R}{R+R_h} U_1$$

- Le rhéostat R_h permet de régler i et U_2 bien que la tension U_1 disponible soit constante

Rhéostat en potentiomètre

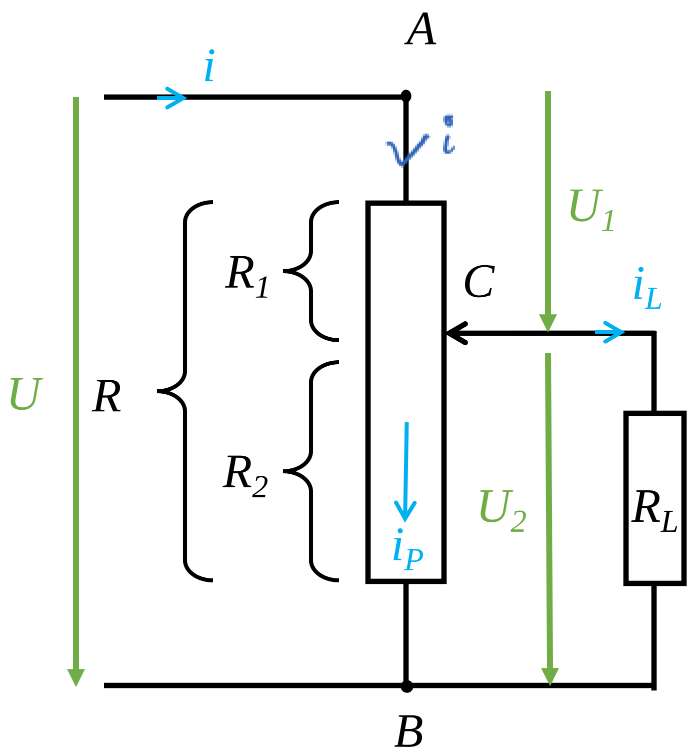
Un potentiomètre est un type de résistance variable à trois bornes:

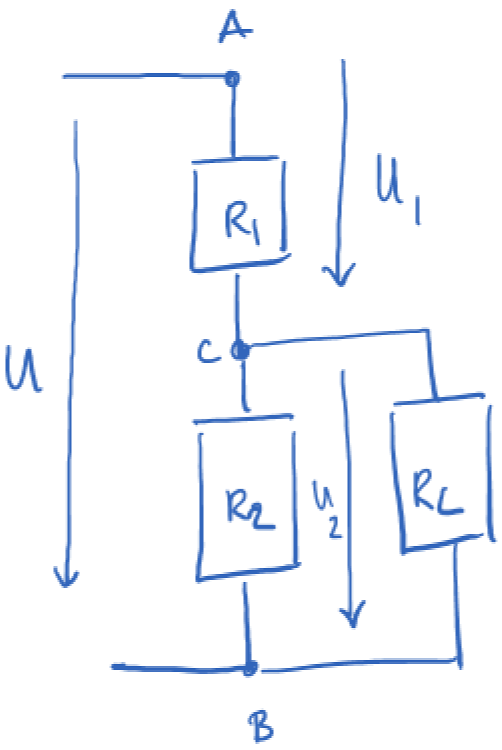
- une est reliée à un curseur se déplaçant sur une piste résistante terminée par les deux autres bornes.
- Permet de recueillir, entre la borne C et une des deux autres bornes, une tension qui dépend de la position du curseur et de la tension à laquelle est soumise la résistance

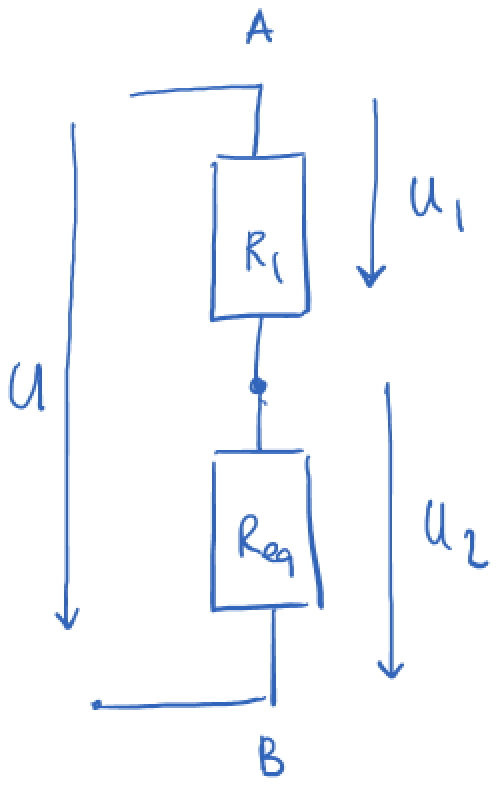


Quand aucun appareil n'est branché entre B et C, variations de U_2 en fonction de R_2 sont linéaires.

Etude en charge





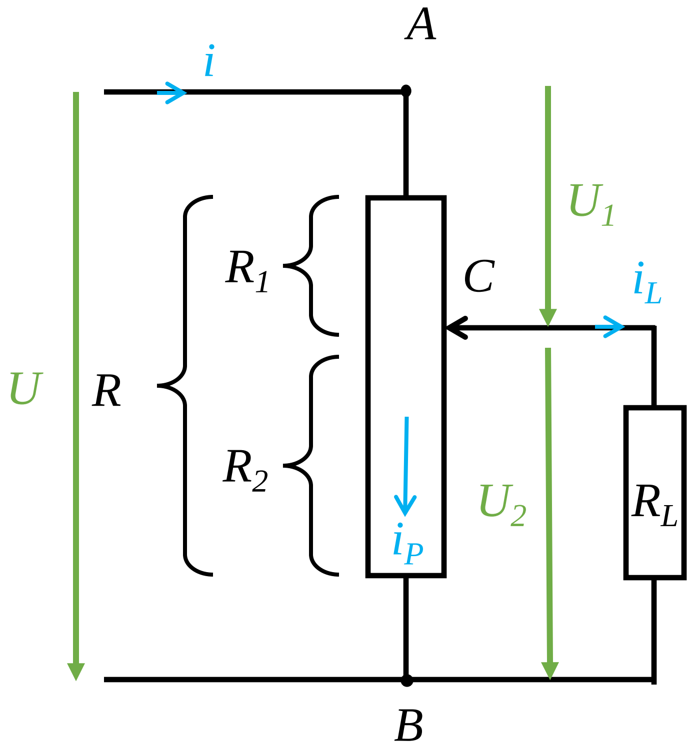


$$R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$

$$u_2 = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} u = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{eq}}} u = \frac{1}{1 + \frac{R_1(R_2 + R_L)}{R_2 R_L}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_L} + \frac{R_1}{R_2}} u$$

Etude en charge

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} U$$

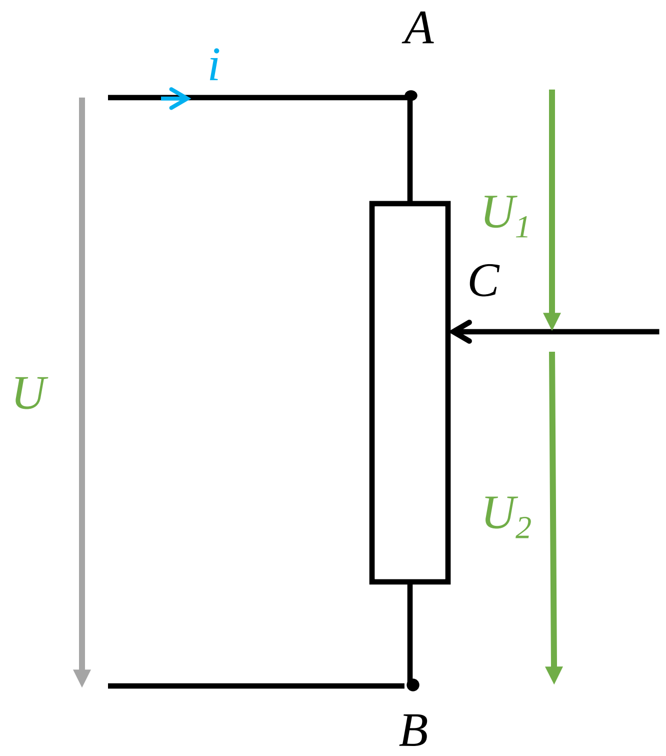


$$U_2 = \frac{U}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_L}}$$

La tension en charge est inférieure à la tension à vide

- Sauf si le curseur est en B: $U_2 = 0\ \mathrm{V}$
- Sauf si le curseur est en A: $U_2 = U$

Exemple



On utilise un rhéostat de $150\ \Omega$ en potentiomètre. La tension entre les bornes extrêmes est $U = 210\ \mathrm{V}$. Le curseur est placé au milieu.

(a) Quelle est la tension U_2 sans charge placée entre B et C ?

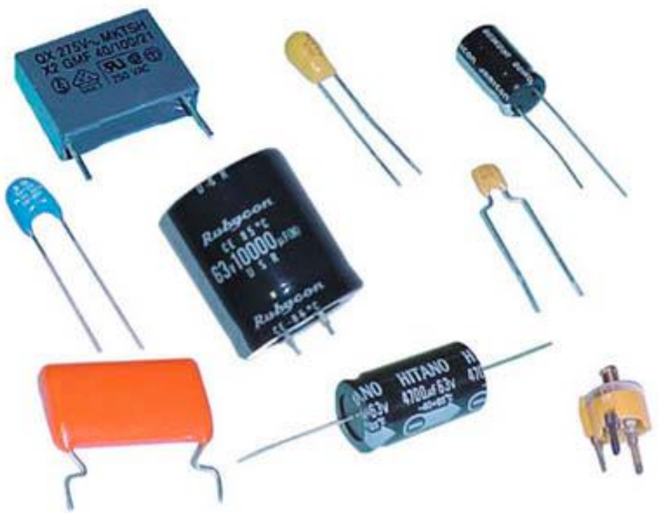
(b) Quelle est la tension U_2 pour $R = 150\ \Omega, 50\ \Omega, 25\ \Omega$ placée entre B et C

Les condensateurs

Le condensateur

Le condensateur est un composant électrique élémentaire

- Dipôle
- Très utilisé



Utilisé comme:

- Accumulateur d’énergie
- Mémoire
- Filtre antiparasites
- Protection dans les circuits à courant alternatif (évite les discontinuités)
- …

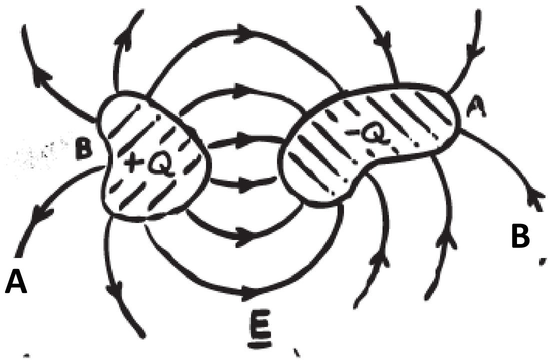
Condensateur généralisé

Soit deux surfaces conductrices:

- de forme quelconque,
- isolées et fixes dans l'espace.

Les deux surface conductrices ont une charge nette Q égale et opposée.

- La séparation de charge $\pm Q$ est générée lorsqu'une source de tension est connectée à un tel arrangement.

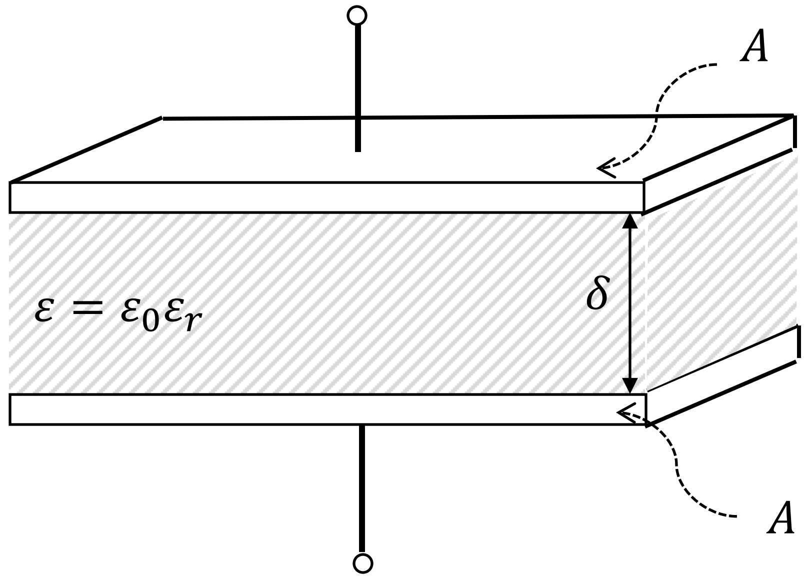


Un tel système est un condensateur

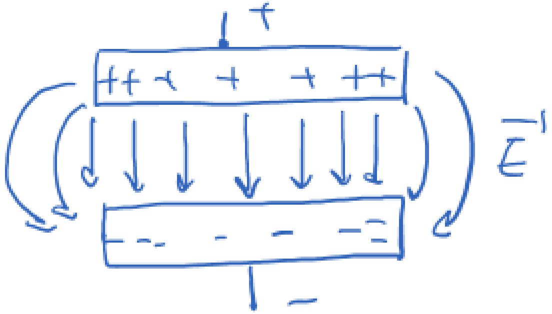
Condensateur plan

On parle de ***condensateur plan*** lorsque les deux électrodes d'un condensateur sont deux plaques parallèles tel que:

- Chaque électrode a une surface A
- Les électrodes sont séparées par une distance δ
- Entre les électrodes se trouve un diélectrique de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ F/m

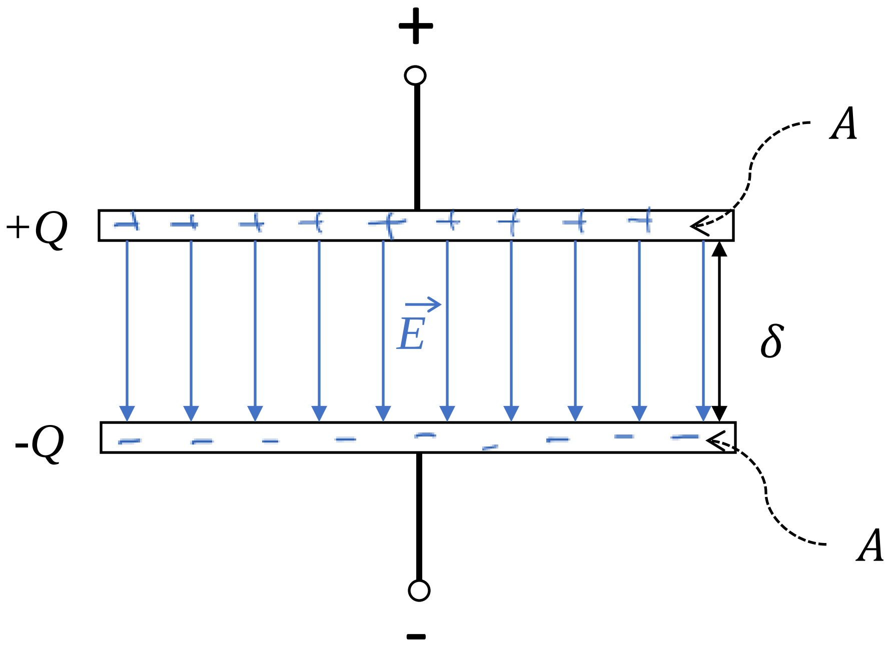


Condensateur plan idéal



Lorsque les plaques sont grandes par rapport à δ $(A \gg \delta)$

- Les effets de bord peuvent être négligés.
- Nous supposons donc que le champ électrique qui s'établi entre les deux plaques lorsqu'une tension y est présente est homogène.



- Le déplacement électrique $\vec{D}$ est proportionnel à $\vec{E}$

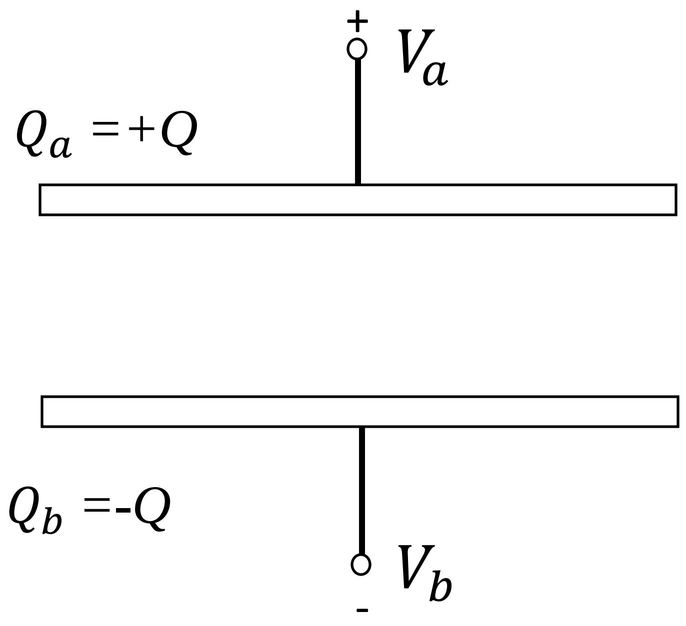
$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

- $\vec{D}$ est également un ***flux électrique***

$$\left|\vec{D}\right| = \frac{Q}{A}$$

Capacité

Un condensateur est caractérisé par la propriété d'accumuler les charges sous l'action d'une différence de potentiel



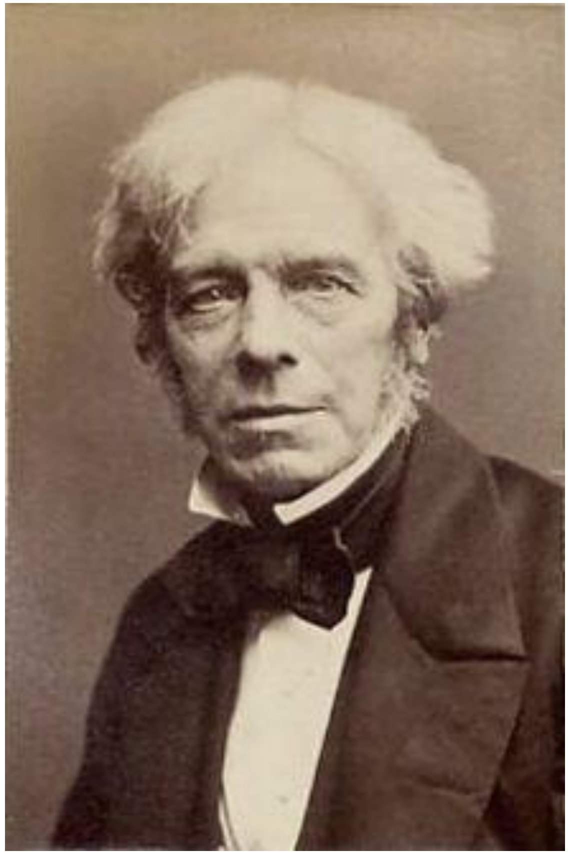
$$Q_a = -Q_b \propto V_a - V_b$$

$$Q_a = Q = C(V_a - V_b)$$

C est la capacité du condensateur

$$\boxed{Q = CU_{ab}}$$

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} \equiv F$$



Michael Faraday (1791 - 1967)

- Michael Faraday est un physicien et un chimiste britannique, connu pour ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'électromagnétisme et l'électrochimie. Par exemple en 1831 il a découvert l'induction électromagnétique. Faraday démontre que la charge se situe seulement à l'extérieur d'un conducteur chargé, et que celle-ci n'a aucun effet sur ce qui peut être situé à l'intérieur : c'est l'effet de "blindage", utilisé dans la cage de Faraday.

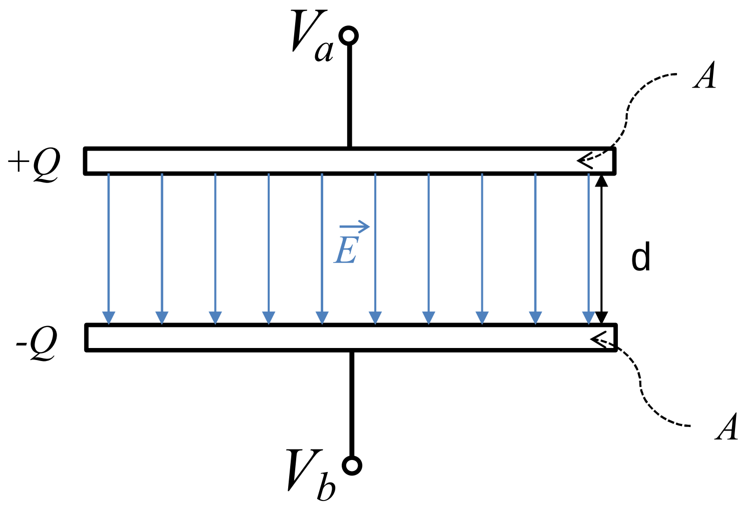
- Son nom a été donné à l'unité de mesure SI de la capacité électrique

- Trivia: son portrait figure sur certains billets anglais de 20 livres

Calcul de la charge

Nous savons que:

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \quad \text{et que} \quad |\vec{D}| = \frac{Q}{A}$$



$$Q = \varepsilon|\vec{E}|A$$

Hors pour un champ homogène nous pouvons écrire: $|\vec{E}| = \dfrac{U_{ab}}{\delta}$ V/m

$$\boxed{Q = \varepsilon A\frac{U_{ab}}{\delta}}$$

Calcul de la capacité

Par définition: $Q = CU_{ab}$

Puisque : $Q = \varepsilon A \dfrac{U_{ab}}{\delta}$

On en déduit que

$$\boxed{C = \varepsilon \frac{A}{\delta}}$$

- La capacité est proportionnelle à la surface des électrodes (A)
- La capacité est inversement proportionnelle à distance séparant les électrodes (δ)
- Plus la permittivité du matériau remplissant (ε) le condensateur est élevé plus la capacité est grande

Point pratique: grande capacité?

Modélisons un condensateur plan avec

- De l'air entre les électrodes (ε_0 = 8.854 10-12 Fm^{-1})
- Une séparation de δ = 1 mm
- Une capacité C de 1 F

$$C = \varepsilon \frac{A}{\delta} = 1$$

$$A = \frac{C\delta}{\varepsilon} = \frac{(10^{-3})}{8.854\ 10^{-12}} = 0.1\ 10^{9}\ m^2$$

Condensateur et diélectrique

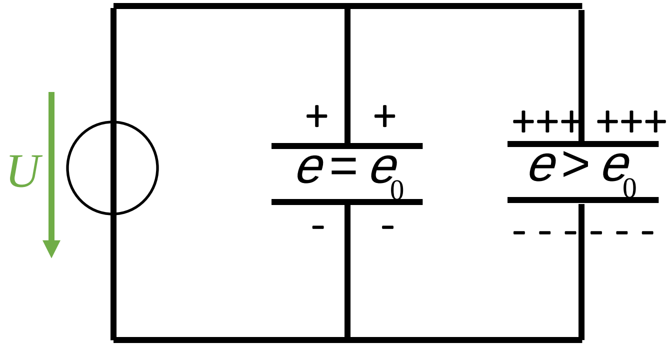
$Q = CU \qquad Q = \varepsilon \frac{A}{\delta} U$

$C = \varepsilon \frac{A}{\delta}$

Electrodes + tension identiques, différents matériaux

A, δ, U identiques

Q ↗ , C ↗

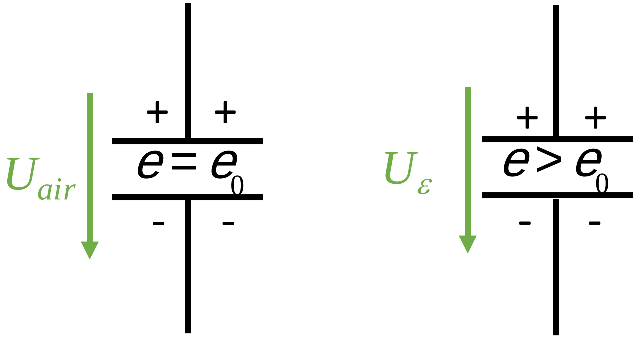


- Conclusion: $\varepsilon \rightarrow$ grande C

Electrodes + charge stockée identiques, différents matériaux

A, δ, Q identiques

$Q = \varepsilon_0 \frac{A}{\delta} U_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{\delta} U_\varepsilon \Rightarrow U_\varepsilon = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$



- Conclusion: $U_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_r} U_{air}$

Condensateur et énergie accumulée

La fonction première d'un condensateur est d'accumuler de l'énergie.

Un condensateur se charge lorsqu'une tension est appliquée à ses bornes:

- Condensateur chargé: charge Q est constante.

- Or $i(t) = {}^{dQ}/_{dt}$: si Q est constante alors le courant est nul $i(t) = 0$

Condensateur chargé devient alors donc un circuit ouvert

Un condensateur se décharge lorsqu'il est par exemple connecté à une résistance:

- Il libère l'énergie accumulée.
- Il se comporte alors comme une source de tension.

Energie accumulée d'un condensateur chargé

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger:

- Supposons à un instant donné la charge déjà accumulée soit q.
- Différence de potentiel entre les électrodes: $\frac{q}{C}$ $Q = CU \Rightarrow U = Q/C$
- Travail nécessaire pour faire passer charge infinitésimale dq de l'électrode positive à celle négative:

$$dW = \frac{q}{C}\,dq$$

- Travail total: $W_C = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\Big|_0^Q$

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2}CU_{ab}^2}$$ J $Q = CU$

Comportement dynamique

Analyses des condensateurs

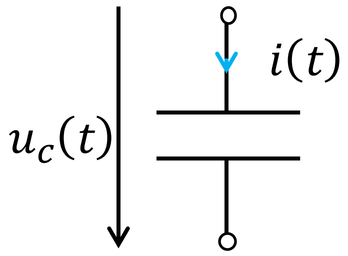
Rappels:

- Un condensateur accumule de l'énergie et peut ensuite la donner.
- On a vu qu'en régime continu $i = 0$: le condensateur chargé se comporte comme un circuit ouvert
- Que se passe-t-il **pendant** la charge du condensateur?

Nous avons déjà que

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = Q(t) = Cu_c(t)$$



$$\boxed{i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}}$$

Forme intégrale

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

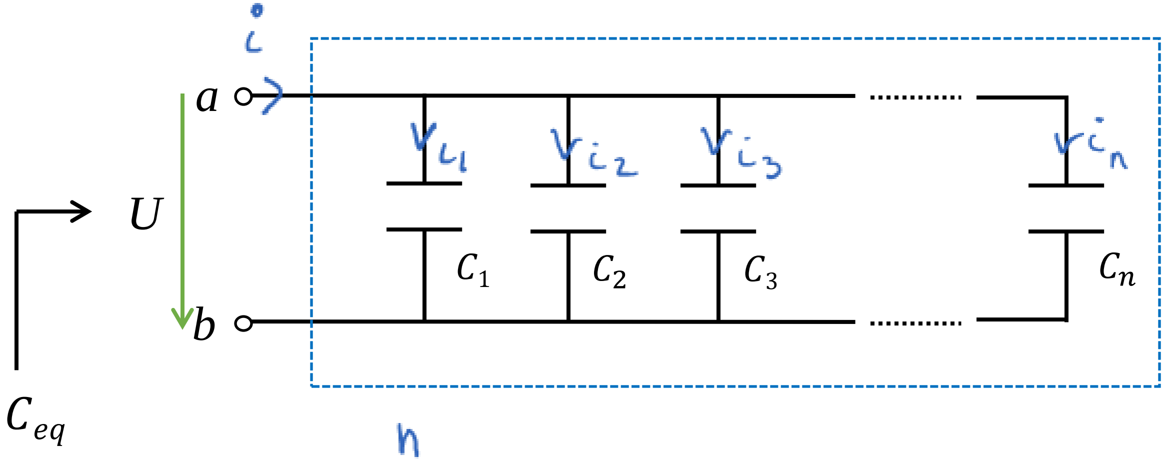
$$du_c(t) = \frac{1}{C}i(t)dt$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'$$

Pour un point de référence t_0 : $u_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(t')dt' + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$

$$u_c(t) = u_c(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$$

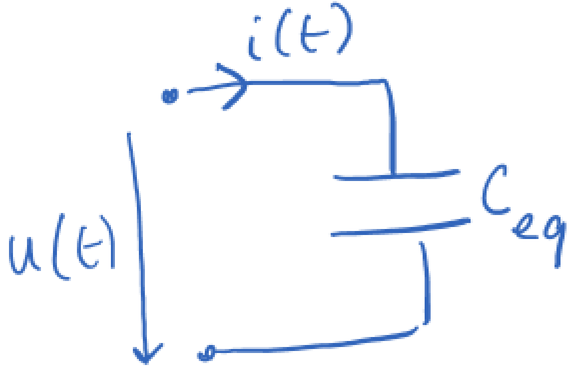
Condensateurs en parallèle



$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t)$$

$$i_k = C_k \frac{du_c(t)}{dt} = C_k \frac{dU(t)}{dt}$$

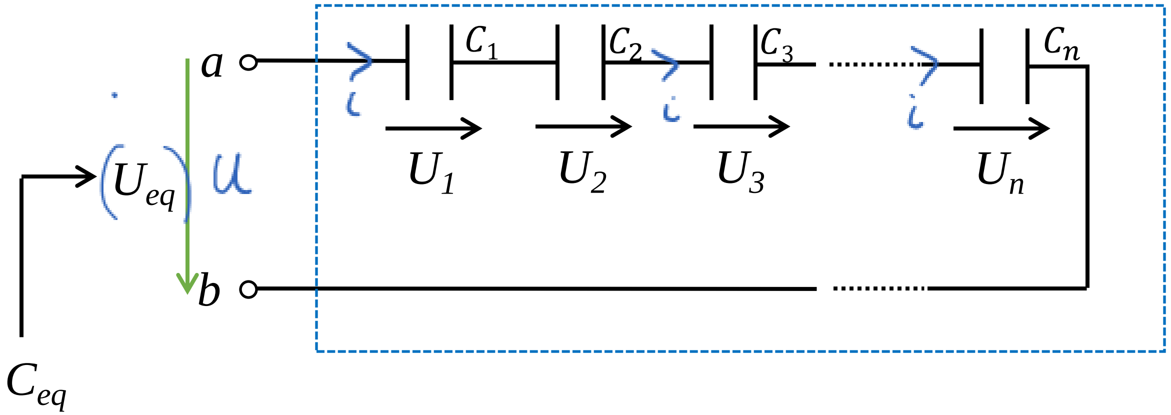
$$i(t) = \frac{dU(t)}{dt} \sum_{k=1}^{n} C_k$$



$$i(t) = C_{eq} \frac{dU(t)}{dt}$$

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Condensateurs en série

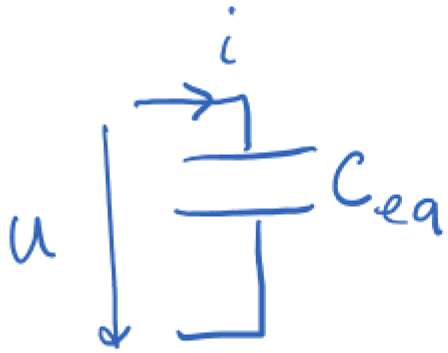


$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{du_k(t)}{dt}$$

$$i_k = C_k \frac{du_k(t)}{dt} = i(t) \Rightarrow \frac{du_k(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C_k}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = i(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

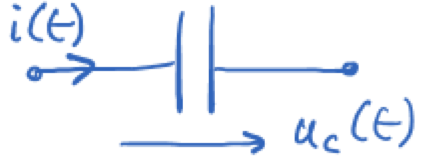


$$i(t) = C_{eq} \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

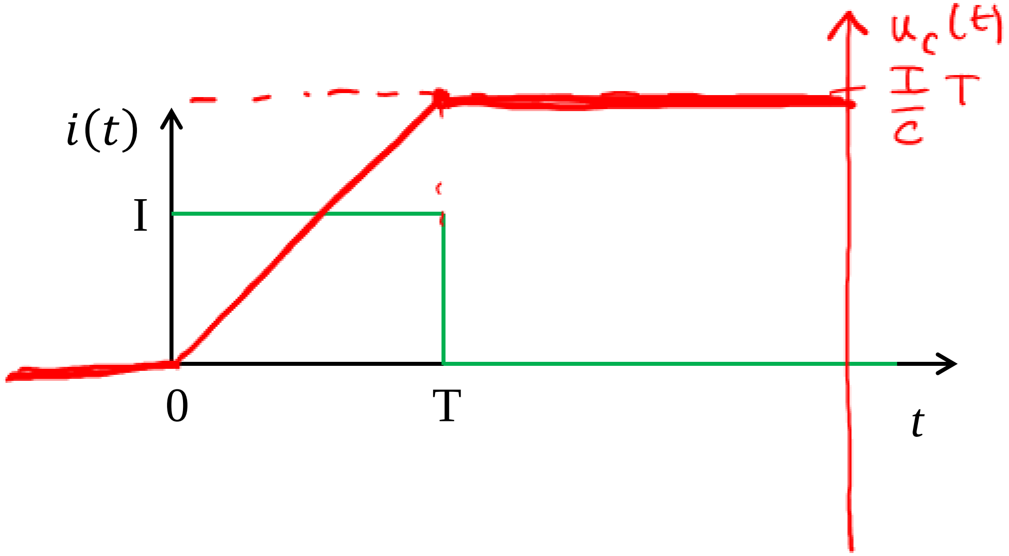
Exemple 1

$Q = 0$, $u_c(t) = 0V$



Considérons un condensateur initialement déchargé. Une impulsion de courant $i(t)$ y est appliquée (voir figure).

Comment varie la tension aux bornes du condensateur? $u_c(t) = u_c(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$



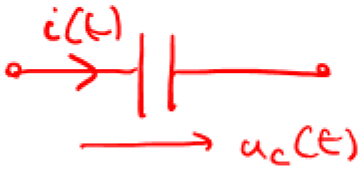
- $t \leq 0 \quad Q = 0 \quad u_c(t) = 0V$
- $0 \leq t \leq T \quad i(t) = I$

$$u_c(t) = 0 + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt' = \frac{I}{C}t$$

- $t \geq T \quad i(t) = 0$

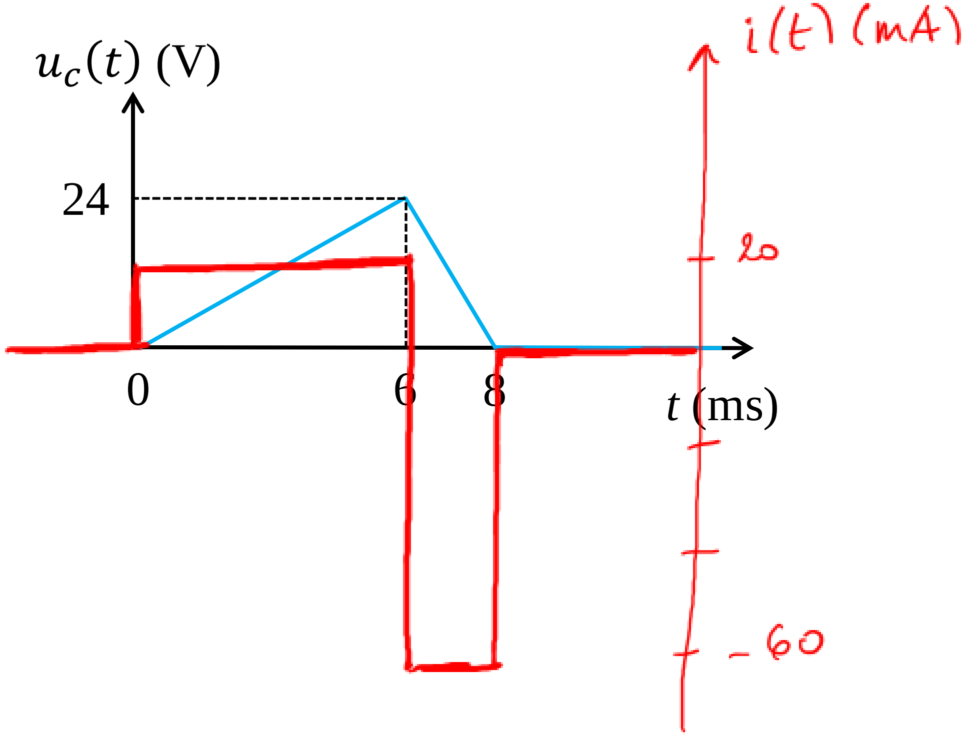
$$u_c(t) = \frac{I}{C}T + \frac{1}{C}\int 0\,dt = \frac{I}{C}T$$

Exemple 2



La tension $u_c(t)$ aux bornes d'un condensateur de 5 µF suit la tendance décrite dans la figure. Cherchons le courant correspondant.

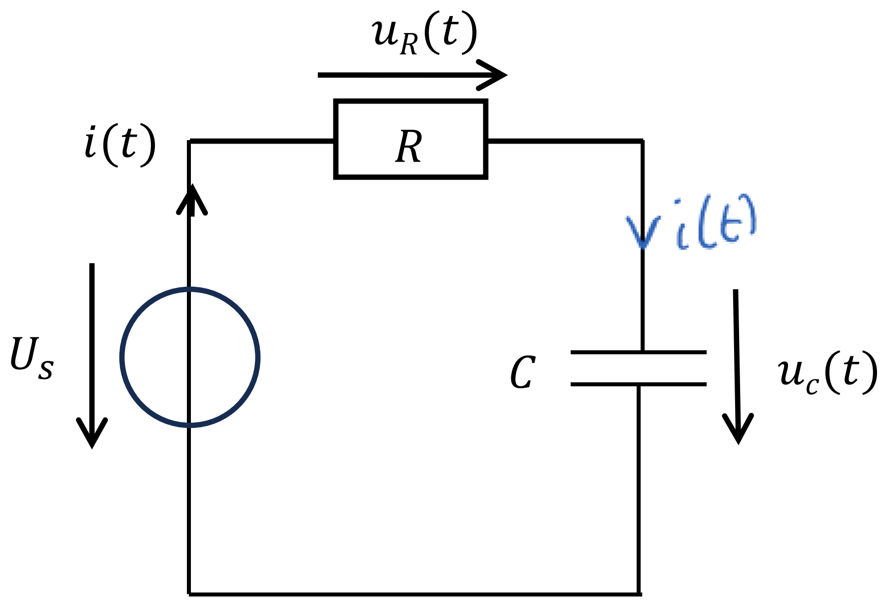
$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = (5\,10^{-6})\frac{du_c(t)}{dt}$$



- $t \leq 0$: $u_c(t) = 0$ $i(t) = 0$
- $0 \leq t \leq 6\,\text{ms}$: $i(t) = (5\,10^{-6})\dfrac{24}{6\,10^{-3}} = 20\,\text{mA}$
- $6 \leq t \leq 8\,\text{ms}$ $i(t) = (5\,10^{-6})\left(-\dfrac{24}{2\,10^{-3}}\right) = -60\,\text{mA}$
- $t \geq 8\,\text{ms}$ $u_c(t) = 0$ $i(t) = 0$

Circuit RC

On modélise un circuit dépendant du temps t:



loi des mailles :

$$u_R(t) + u_c(t) - U_s = 0$$

$$u_R(t) + u_c(t) = U_s$$

condensateur $\quad i(t) = C \dfrac{du_c(t)}{dt}$

$$R\,i(t) + u_c(t) = U_s$$

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = U_s$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{1}{RC} U_s$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

Définition de la fonction exponentielle: solution de l'équation différentielle

$$\frac{dg(z)}{dz} = g(z)$$

La fonction exponentielle s'écrit: $g(z) = e^{z}$

Propriété: si $h(z) = e^{kz}$ alors $\frac{dh(z)}{dz} = ke^{kz} = kh(z)$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

On souhaite déterminer une fonction $x(t)$ régie par une équation différentielle d'ordre 1

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

- τ est une constante de temps (nécessaire pour que l'équation soit physiquement correcte)
- X_0 est une constante

1. On résout l'équation homogène: $$\frac{dx_h(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x_h(t) = 0$$

$$\frac{dx_h(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} x_h(t)$$

- Les solutions d'une telle équations sont des fonctions exponentielles:

$$x_h(t) = Ke^{-t/\tau}$$

Point sur les équations différentielles d'ordre 1

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

2. On cherche la solution particulière:

- L'équation accepte une solution sous la forme de constante ($\frac{dx_p(t)}{dt} = 0$)

$$\frac{1}{\tau}x_p(t) = \frac{1}{\tau}X_0$$

$$x_p(t) = X_0$$

3. On additionne la solution de l'équation homogène associée et la solution particulière

$$x(t) = Ke^{-t/\tau} + X_0$$

Equations en régime transitoire

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} x(t) = X$$

$$x(t) = \tau X + K e^{-t/\tau}$$

τX : solution lorsque t tend vers l'infini (régime d'équilibre $\frac{d}{dt} = 0$).

τ: la constante de temps du circuit

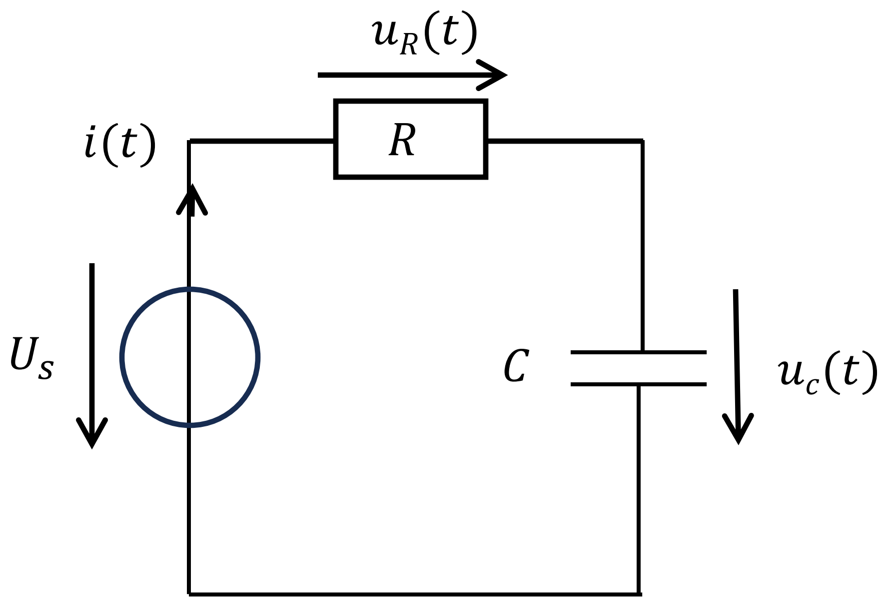
- Après 5τ on peut estimer que le circuit a atteint le régime d'équilibre.

K: constante qui peut être déterminée si l'on connait $x(t)$ a un quelconque instant

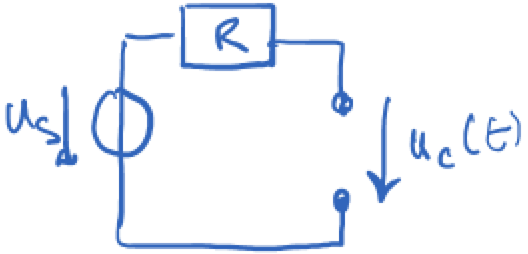
Résoudre un circuit RC: utiliser la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$ et résoudre l'équation différentielle obtenue à partir des lois de Kirchhoff

$\tau = RC$

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{RC}}}_{}^{\frac{1}{\tau}} u_c(t) = \boxed{\frac{1}{RC} U_s} \quad \times$$



Condition initiale:
$u_c(0) = 0\ \mathrm{V}$



$$u_c(t) = \frac{1}{RC} U_s \times RC + K \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

$$u_c(t) = U_s + K \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

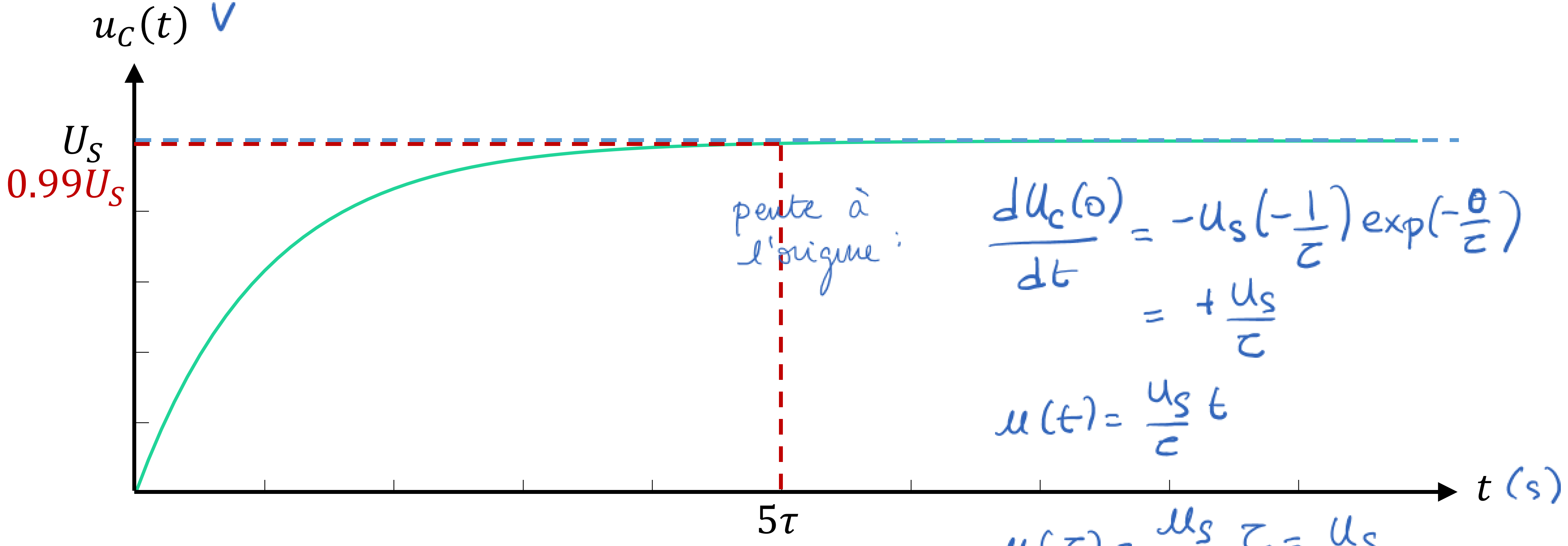
$$u_c(0) = 0\ V = U_s + K \exp[0]$$

$$0 = U_s + K \Rightarrow K = -U_s$$

$$u_c(t) = U_s - U_s \exp\left[-\frac{t}{RC}\right] V, \quad t \geq 0$$

$$u_c(t) = U_s - U_s \exp(-t/\tau_c)$$

$$u_c(\tau) = U_s - U_s \exp(-1) = U_s(1-\exp(-1))$$



pente à l'origine :

$$\frac{du_c(0)}{dt} = -U_s\left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{0}{\tau}\right) = +\frac{U_s}{\tau}$$

$$u(t) = \frac{U_s}{\tau} t$$

$$u(\tau) = \frac{U_s}{\tau}\tau = U_s$$

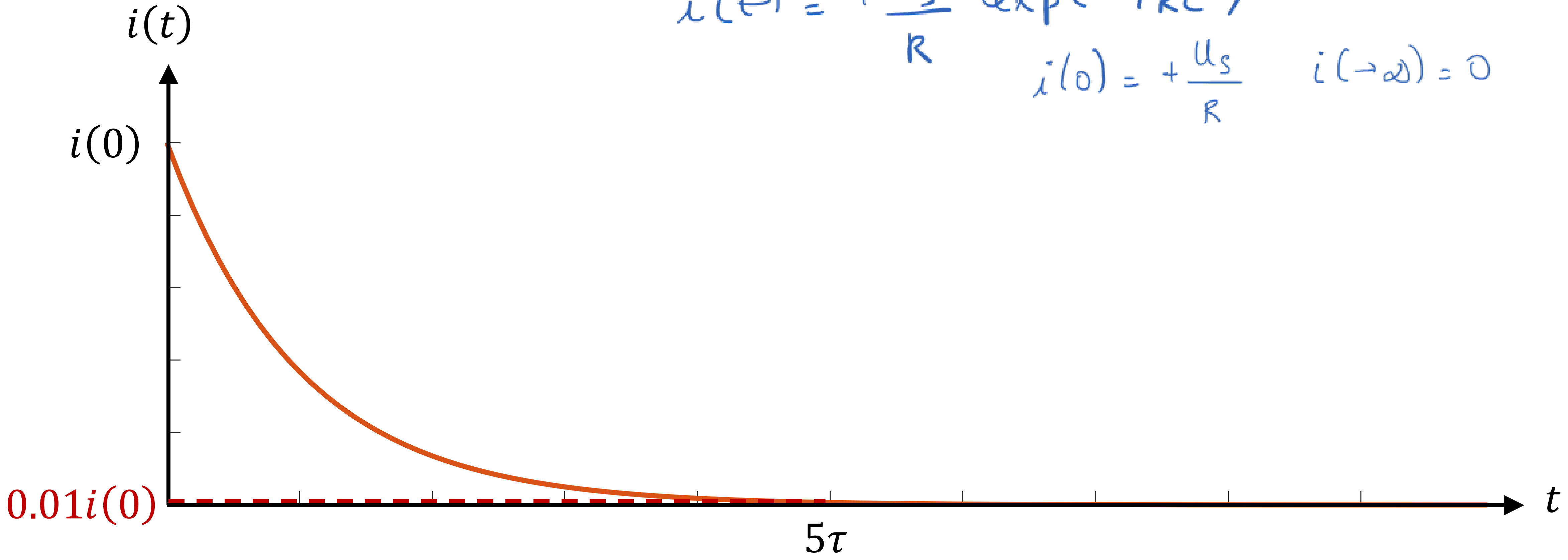
EPFL

$$u_c(t) = U_s - U_s \exp(-t/\tau)$$

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = -\frac{CU_s}{RC}\exp(-t/RC); \quad \tau = RC$$

$$i(t) = +\frac{U_s}{R}\exp(-t/RC)$$

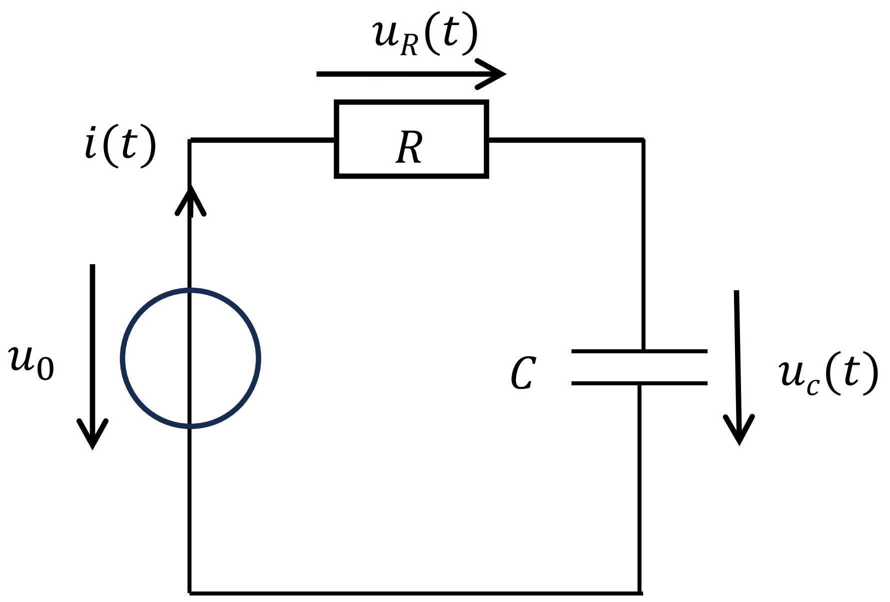
$$i(0) = +\frac{U_s}{R} \qquad i(\to\infty) = 0$$



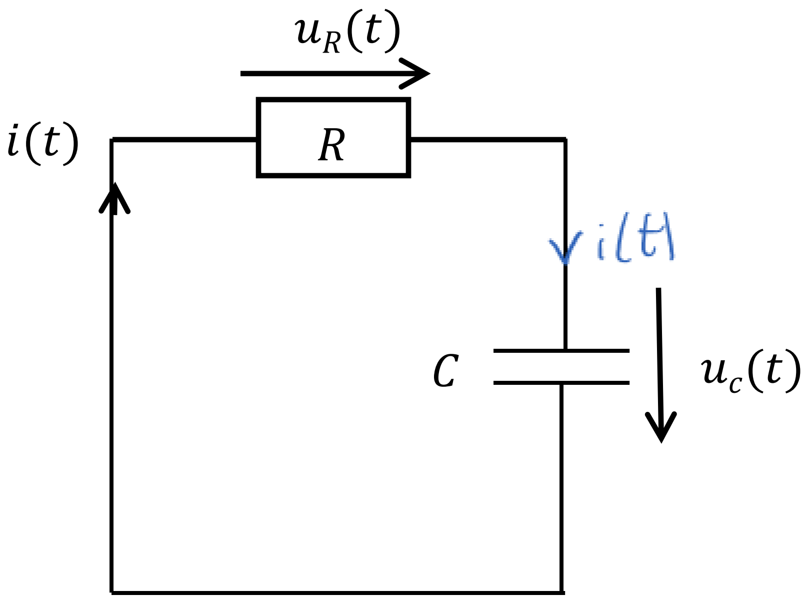
Circuit RC – charge du condensateur

Lorsque l'on alimente le circuit avec une source de tension, le condensateur se charge

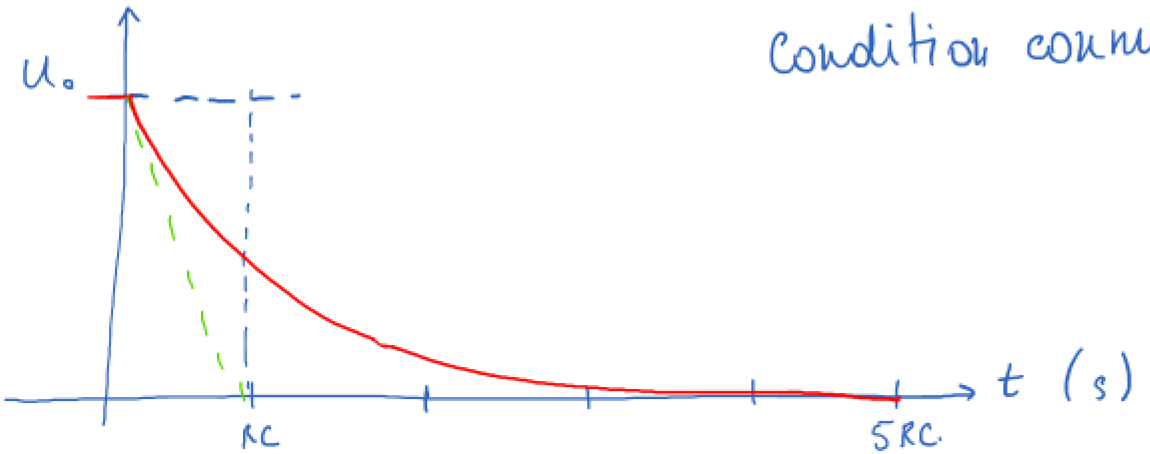
- La tension du condensateur tend vers une constante
- Le condensateur est considéré chargé après 5 contantes de temps
- Le courant du condensateur tend vers 0, correspondant au régime statique



Circuit RC – décharge du condensateur



Condition initiale:
$u_c(0) = u_0$



loi des mailles: $u_R(t) + u_c(t) = 0$

$Ri(t) + u_c(t) = 0$

$i(t)$: courant du condensateur donc

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

donc $RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0 \Rightarrow \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0$

Solution $u_c(t) = k\exp(-t/RC)$

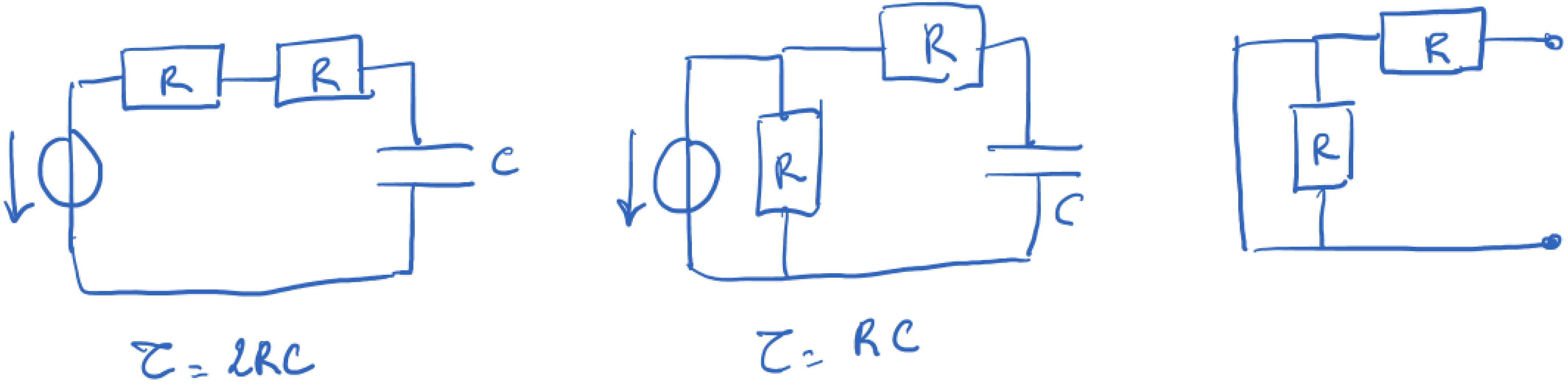
Condition connue $u_c(0) = 0 = k$ donc $\boxed{u_c(t) = u_0\exp(-\frac{t}{RC})}$

Constante de temps

La constante de temps pour un circuit avec un seul condensateur peut être calculée en utilisant le concept de résistance équivalente

- Soit R_{eq} la résistance équivalent vue des bornes du condensateur lorsque toutes les sources du circuit sont éteintes

$$\tau_c = R_{eq} C$$



Tensions et courants dans un circuit RC

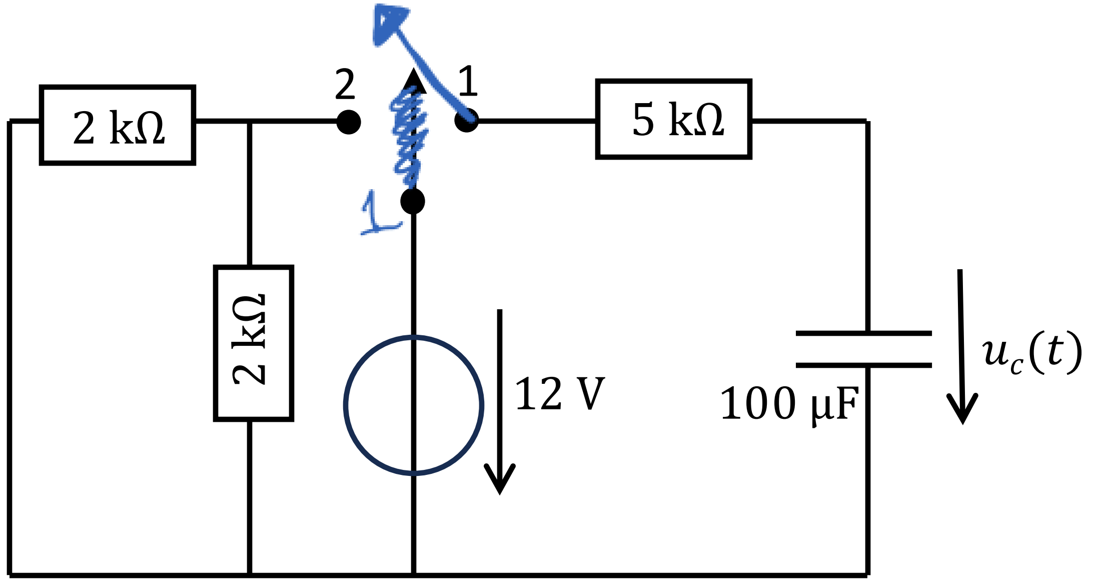
La tension aux bornes d'un condensateur de présente jamais de discontinuité.

Ceci n'est vrai que pour la tension du condensateur ! Autres tensions (par exemple aux bornes d'une résistance) peuvent être discontinues.

Les conditions initiales pour la résolution de l'équation différentielle ne peuvent donc être utilisée que pour le calcul $u_C(t)$

- Peu importe le courant ou la tension à trouver dans le circuit, toujours se baser sur $u_C(t)$ et le courant associé qui traverse le condensateur.

Exemple



Nous avons le circuit ci-contre. Le condensateur est déchargé

A $t = 0$ nous basculons l'interrupteur est en position 1. ~~Le circuit a atteint un régime d'équilibre~~.

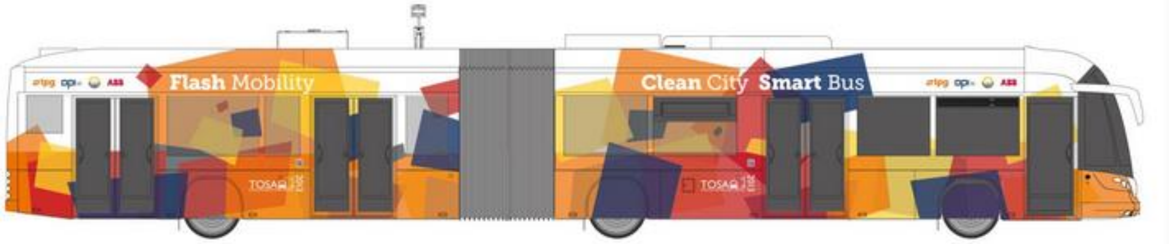
A $t = 1.4$ s , nous commutons l'interrupteur en position 2.

Calculons $u_c(t)$ pour tout $t > 0$

Pour aller plus loin …

Aujourd'hui, il existe des condensateurs particuliers utilisés pour des applications nécessitant de fortes densités de puissance et d'énergie

- Recharge rapide de véhicules électriques
- Démarrage de moteurs
- Récupération d'énergie lors de freinage
- …



Bus électrique TOSA à Genève

Il s'agit de supercondensateurs

- Délivrent plus de courant que des condensateurs conventionnels
- Plus grande durée de vie que les batteries
- Plus rapide comparativement aux batteries

Leur capacité est entre le F et le kF!